

Arbres AVL

Algorithmique et structures de données, 2022-2023

P. Albuquerque (B410), P. Künzli et O. Malaspinas (A401), ISC, HEPIA
2023-05-09

En partie inspirés des supports de cours de P. Albuquerque

Reprise du cours 17, partie arbres AVL

Complexité de la recherche dans un arbre binaire

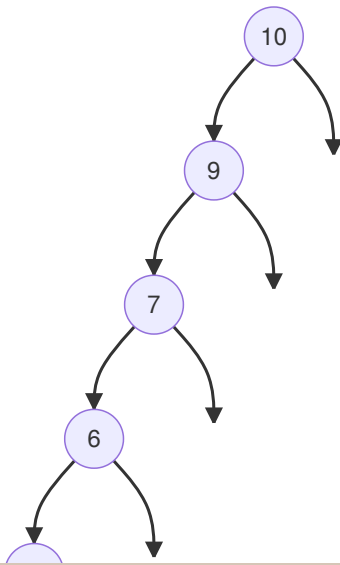
1. En moyenne?
2. Dans le pire des cas?

Reprise du cours 17, partie arbres AVL

Complexité de la recherche dans un arbre binaire

1. En moyenne?
2. Dans le pire des cas?

1. $O(\log_2(N))$
2. $O(N)$



- Quelle propriété doit satisfaire un arbre pour être $O(\log_2(N))$?

Un meilleur arbre

- Quelle propriété doit satisfaire un arbre pour être $O(\log_2(N))$?
- Si on a environ le même nombre de nœuds dans les sous-arbres.

Définition

Un arbre binaire est parfaitement équilibré si, pour chaque nœud, la différence entre les nombres de nœuds des sous- arbres gauche et droit vaut au plus 1.

- Si l'arbre est **parfaitement équilibré**, alors tout ira bien.
- Quelle est la hauteur (profondeur) d'un arbre parfaitement équilibré?

Un meilleur arbre

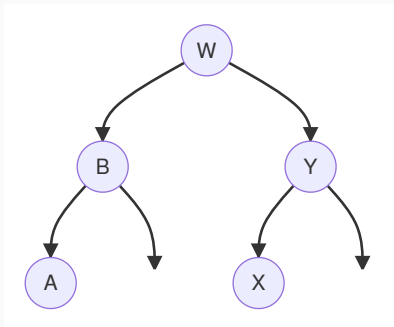
- Quelle propriété doit satisfaire un arbre pour être $O(\log_2(N))$?
- Si on a environ le même nombre de nœuds dans les sous-arbres.

Définition

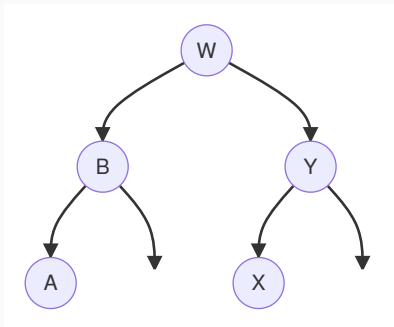
Un arbre binaire est parfaitement équilibré si, pour chaque nœud, la différence entre les nombres de nœuds des sous- arbres gauche et droit vaut au plus 1.

- Si l'arbre est **parfaitement équilibré**, alors tout ira bien.
- Quelle est la hauteur (profondeur) d'un arbre parfaitement équilibré?
- $O(\log_2(N))$.

Équilibre parfait ou pas?

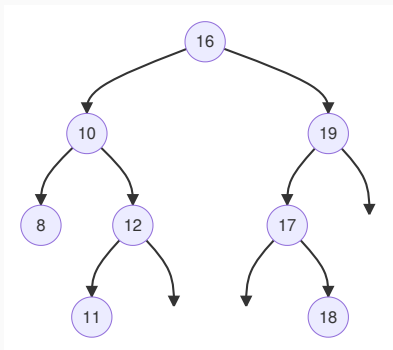


Équilibre parfait ou pas?

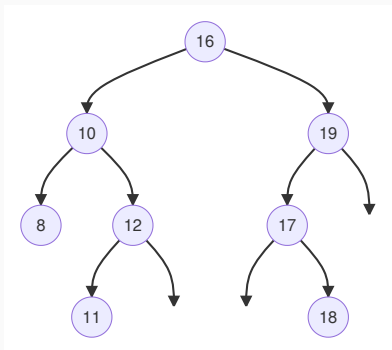


É
Q
U
I
L
I
B
R
É

Équilibre parfait ou pas?



Équilibre parfait ou pas?



P
A
S

É
Q
U
I
L
I
B
R
É

- Quand est-ce qu'on équilibre un arbre?

- Quand est-ce qu'on équilibre un arbre?
- A l'insertion/suppression.
- Maintenir un arbre en état d'équilibre parfait: cher (insertion, suppression).
- On peut "relaxer" la condition d'équilibre: profondeur (hauteur) au lieu du nombre de nœuds:
 - La hauteur $\sim \log_2(N)$.

Définition

Un arbre AVL (Adelson-Velskii et Landis) est un arbre binaire de recherche dans lequel, pour chaque nœud, la différence de hauteur entre le sous-arbre gauche et droit vaut au plus 1.

- Relation entre nœuds et hauteur:

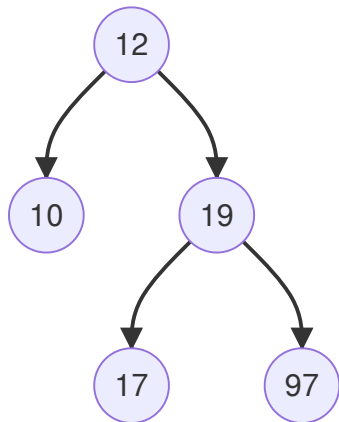
$$\log_2(1 + N) \leq 1 + H \leq 1.44 \cdot \log_2(2 + N), \quad N = 10^5, \quad 17 \leq H \leq 25.$$

- Permet l'équilibrage en temps constant: insertion/suppression $O(\log_2(N))$.

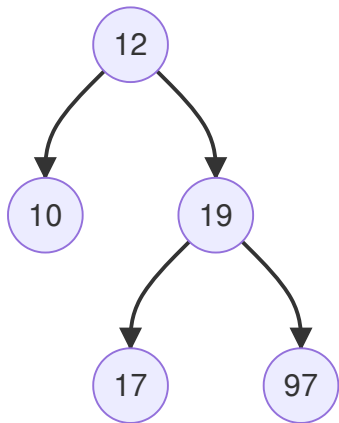
- hg: hauteur du sous-arbre gauche.
- hd: hauteur du sous-arbre droit.
- facteur d'équilibre = fe = $hd - hg$
- Que vaut fe si l'arbre est AVL?

- hg: hauteur du sous-arbre gauche.
- hd: hauteur du sous-arbre droit.
- facteur d'équilibre = fe = $hd - hg$
- Que vaut fe si l'arbre est AVL?
- $fe = \{-1, 0, 1\}$

AVL ou pas?

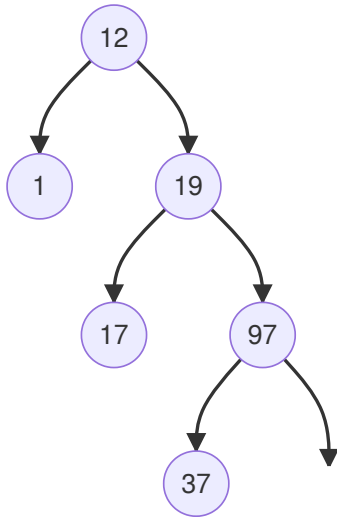


AVL ou pas?

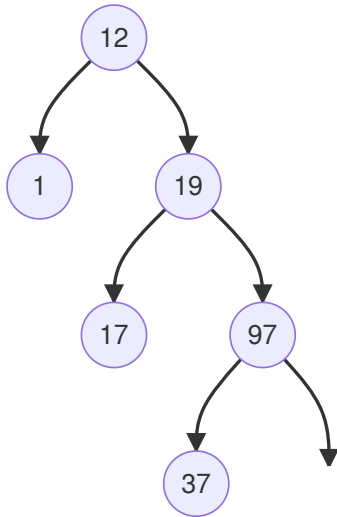


A
V
L

AVL ou pas?



AVL ou pas?

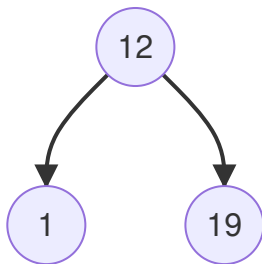


P
A
S

A
V
L

Insertion dans un arbre AVL (1/N)

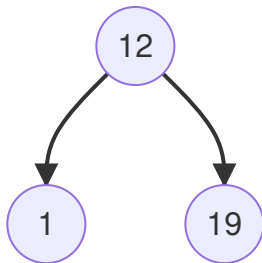
1. On part d'un arbre AVL.
 2. On insère un nouvel élément.
- hd ? hg.
 - Insertion de 4?



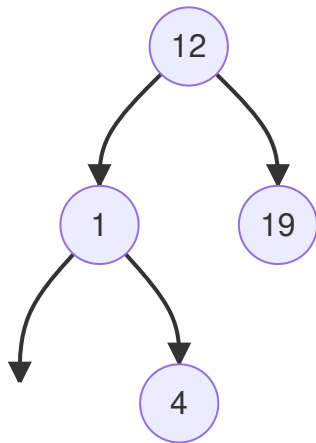
Insertion dans un arbre AVL (1/N)

1. On part d'un arbre AVL.
2. On insère un nouvel élément.

- $hd \neq hg$.
- Insertion de 4?

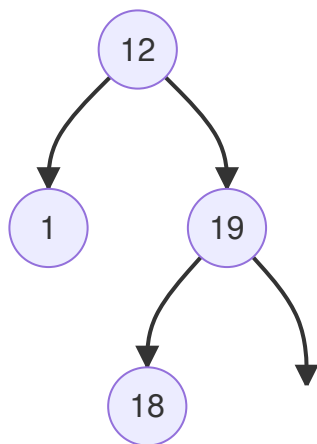


- $hd = hg$



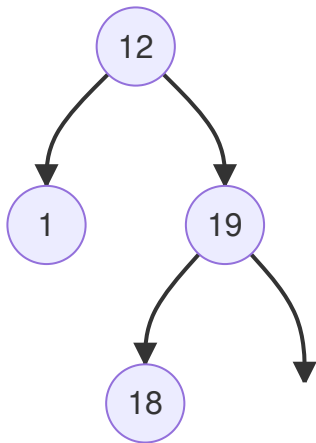
Insertion dans un arbre AVL (2/N)

1. On part d'un arbre AVL.
 2. On insère un nouvel élément.
- hd ? hg.
 - Insertion de 4?

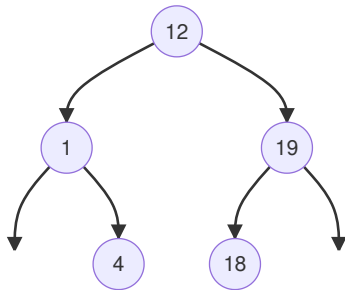


Insertion dans un arbre AVL (2/N)

1. On part d'un arbre AVL.
 2. On insère un nouvel élément.
- $hd \neq hg$.
 - Insertion de 4?



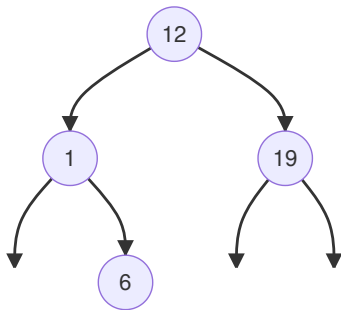
- $hd < hg$



- $fe = 0$

Insertion dans un arbre AVL (3/N)

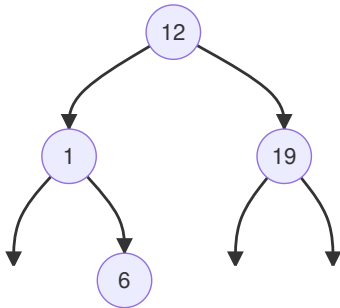
1. On part d'un arbre AVL.
 2. On insère un nouvel élément.
- $hd \neq hg$.
 - Insertion de 4?



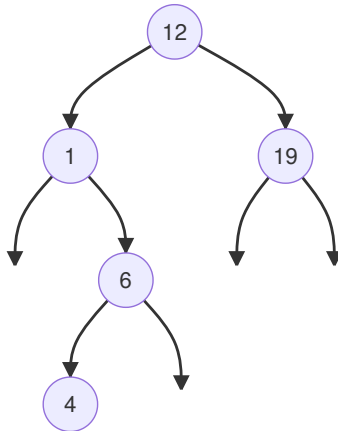
Insertion dans un arbre AVL (3/N)

1. On part d'un arbre AVL.
2. On insère un nouvel élément.

- $hd \neq hg$.
- Insertion de 4?



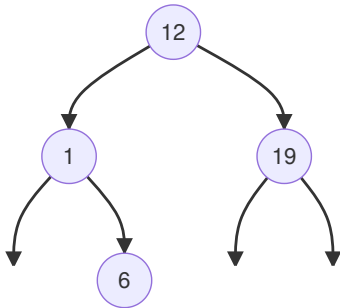
- $hd < hg$



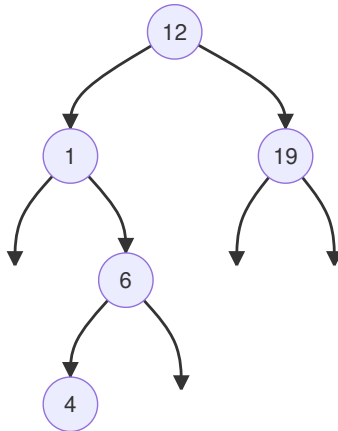
Insertion dans un arbre AVL (3/N)

1. On part d'un arbre AVL.
2. On insère un nouvel élément.

- $hd \neq hg$.
- Insertion de 4?



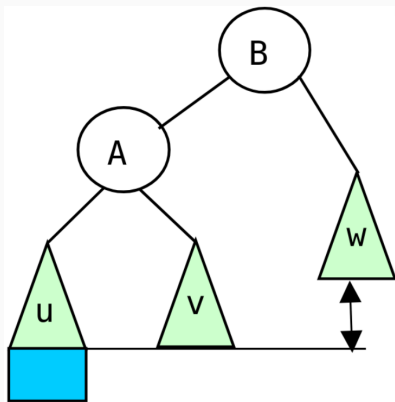
- $hd < hg$



Les cas de déséquilibre

Cas 1a

- u , v , w même hauteur.
- déséquilibre en B après insertion dans u



Cas 1a

- Comment rééquilibrer?

Figure 1: Après insertion

Les cas de déséquilibre

Cas 1a

- u, v, w même hauteur.
- déséquilibre en B après insertion dans u

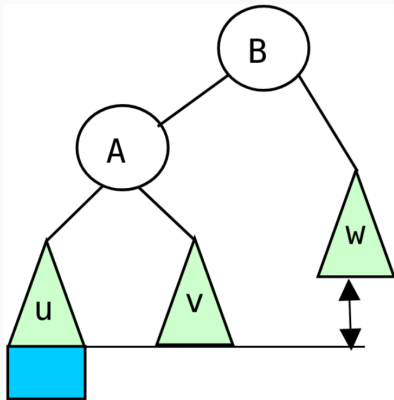


Figure 1: Après insertion

Cas 1a

- Comment rééquilibrer?
- ramène u, v w à la même hauteur.
- v à droite de A (gauche de B)

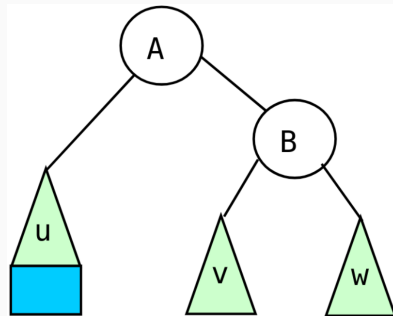


Figure 2: Après équilibrage

Cas 1b (symétrique 1a)

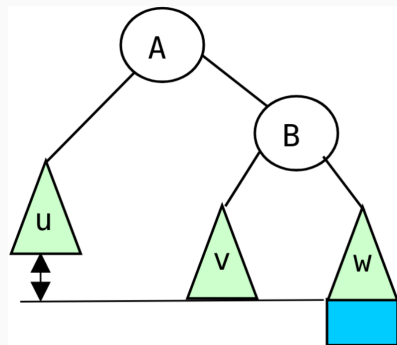


Figure 3: Après insertion

Cas 1b (symétrique 1a)

- Comment rééquilibrer?

Les cas de déséquilibre

Cas 1b (symétrique 1a)

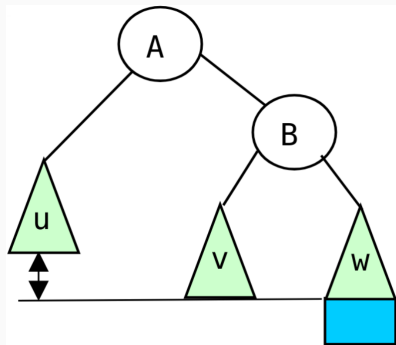


Figure 3: Après insertion

Cas 1b (symétrique 1a)

- Comment rééquilibrer?

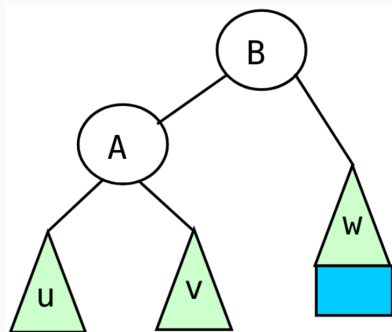
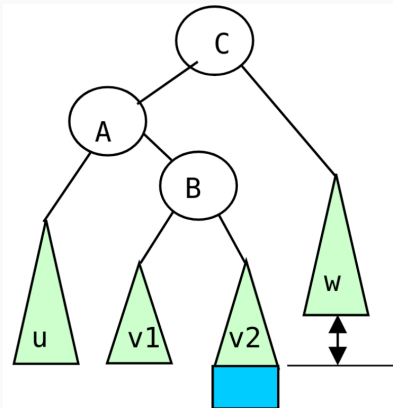


Figure 4: Après équilibrage

Les cas de déséquilibre

Cas 2a

- $h(v1)=h(v2)$, $h(u)=h(w)$.
- déséquilibre en C après insertion dans v2



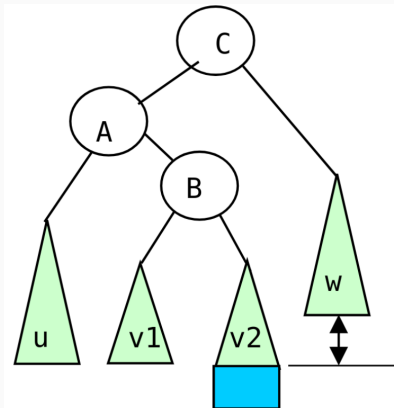
Cas 2a

- Comment rééquilibrer?

Les cas de déséquilibre

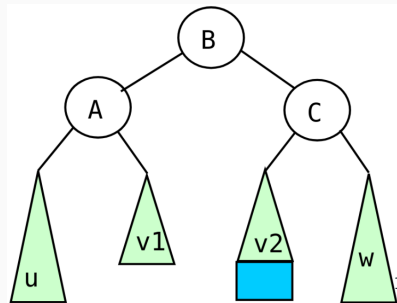
Cas 2a

- $h(v1)=h(v2)$, $h(u)=h(w)$.
- déséquilibre en C après insertion dans v2



Cas 2a

- Comment rééquilibrer?
- ramène u, v2, w à la même hauteur (v1 pas tout à fait).
- v2 à droite de B (gauche de C)
- B à droite de A (gauche de C)
- v1 à droite de A (gauche de B)



Les cas de déséquilibre

Cas 2b (symétrique 2a)

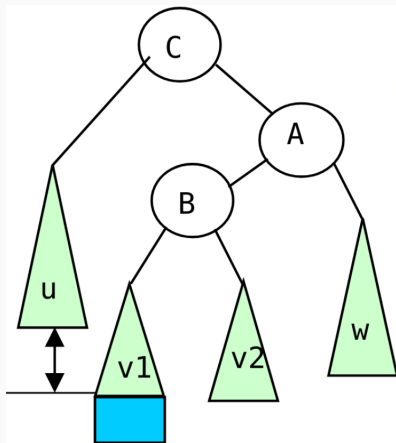


Figure 7: Après insertion

Cas 2b (symétrique 2a)

- Comment rééquilibrer?

Les cas de déséquilibre

Cas 2b (symétrique 2a)

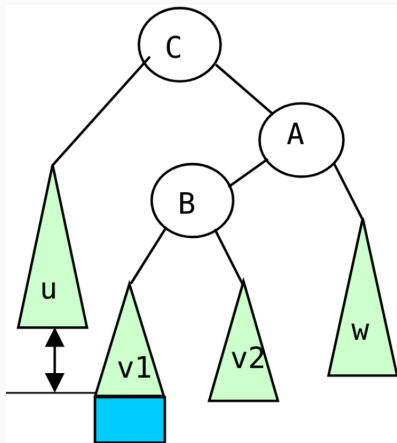


Figure 7: Après insertion

Cas 2b (symétrique 2a)

- Comment rééquilibrer?

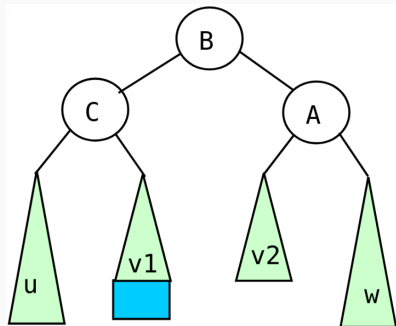


Figure 8: Après équilibrage