

GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

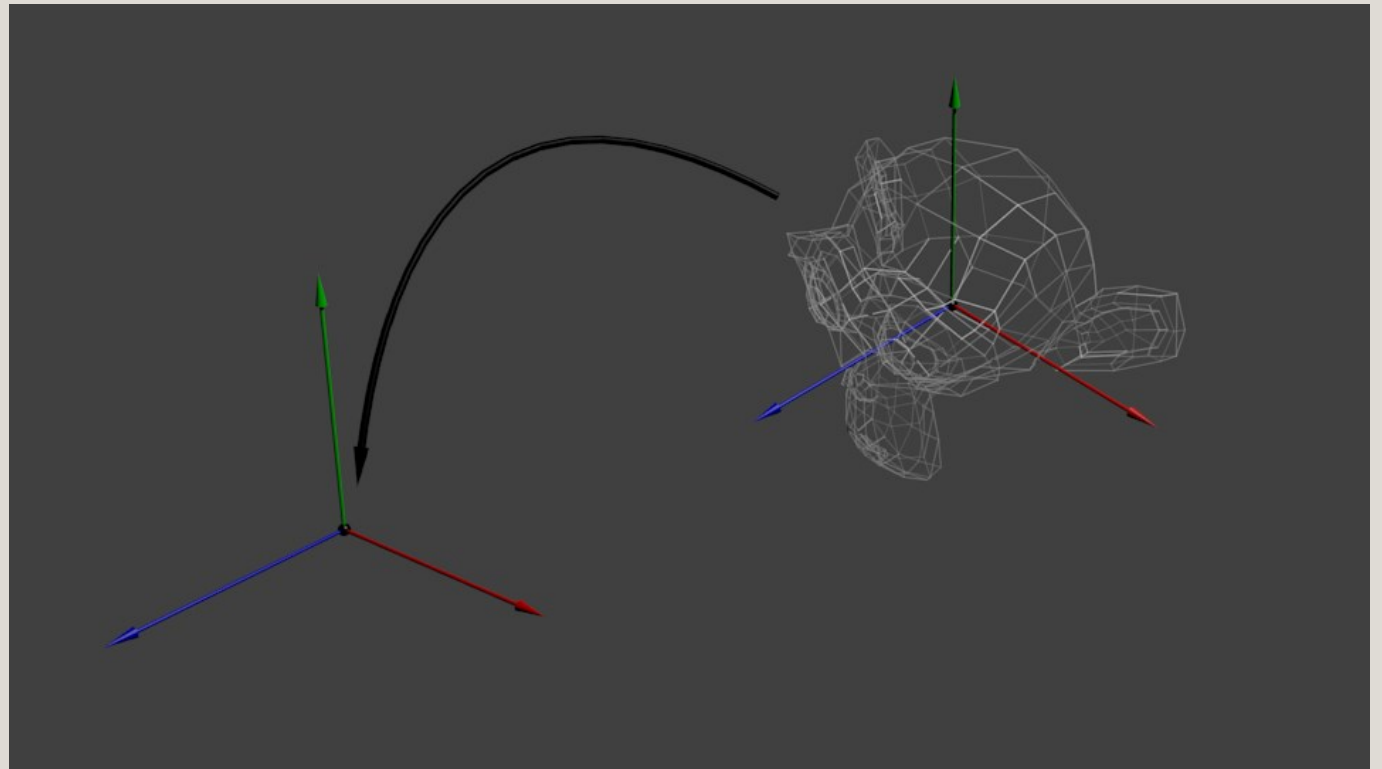
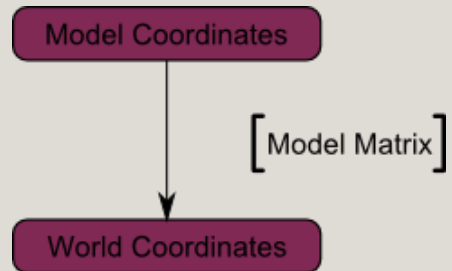
COMMENT GÉRER LES TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE



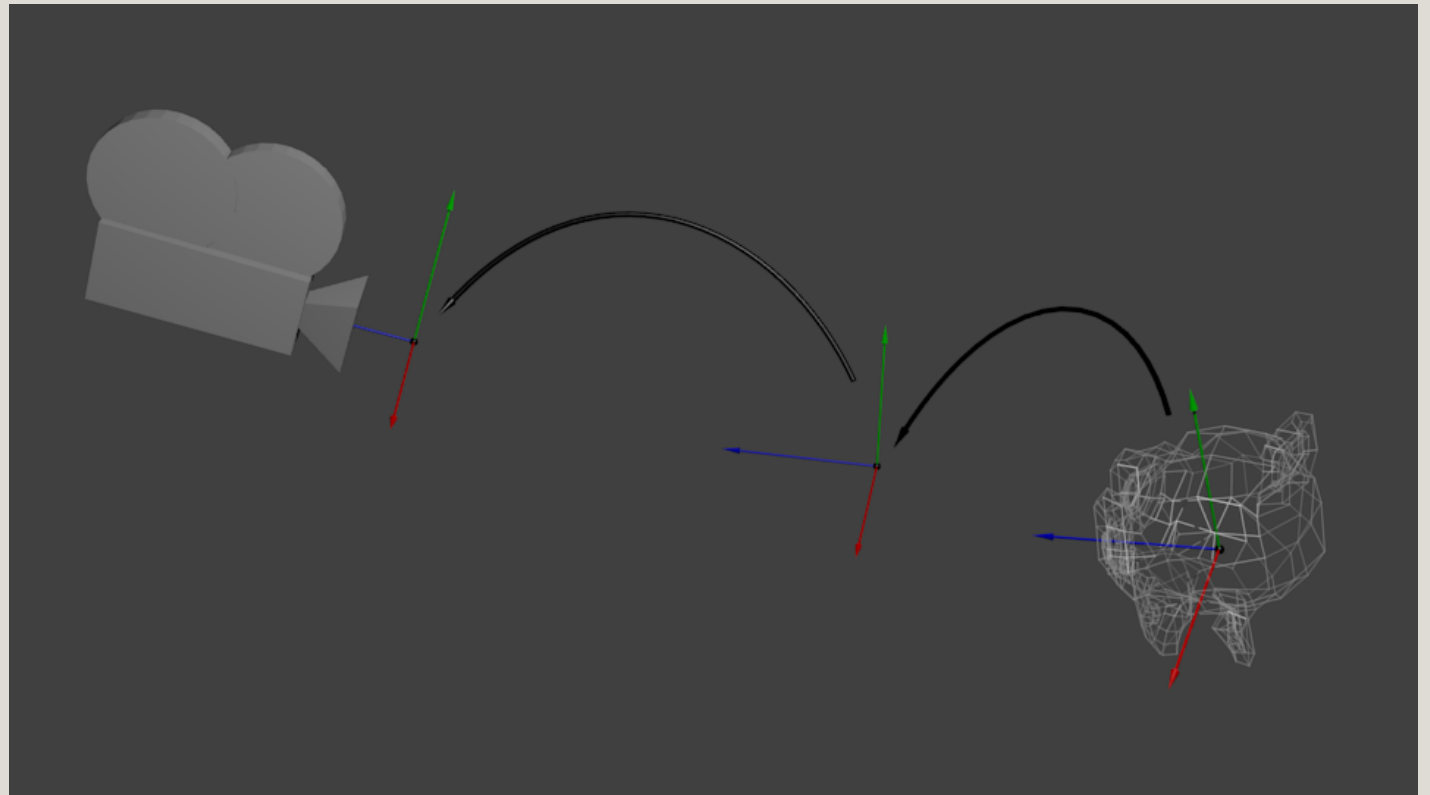
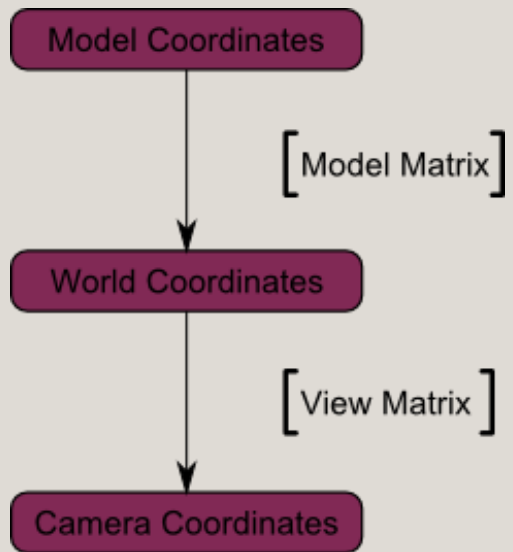
INTRODUCTION

- Géométrie dans l'espace permet de transformer les objets 3D (triangles vues précédemment) afin de les positionner dans l'espace
- Elle permet également de représenter un objet 3D sur un écran 2D du point de vue d'une caméra
- Les outils utilisés sont la trigonométrie, les matrices et les vecteurs

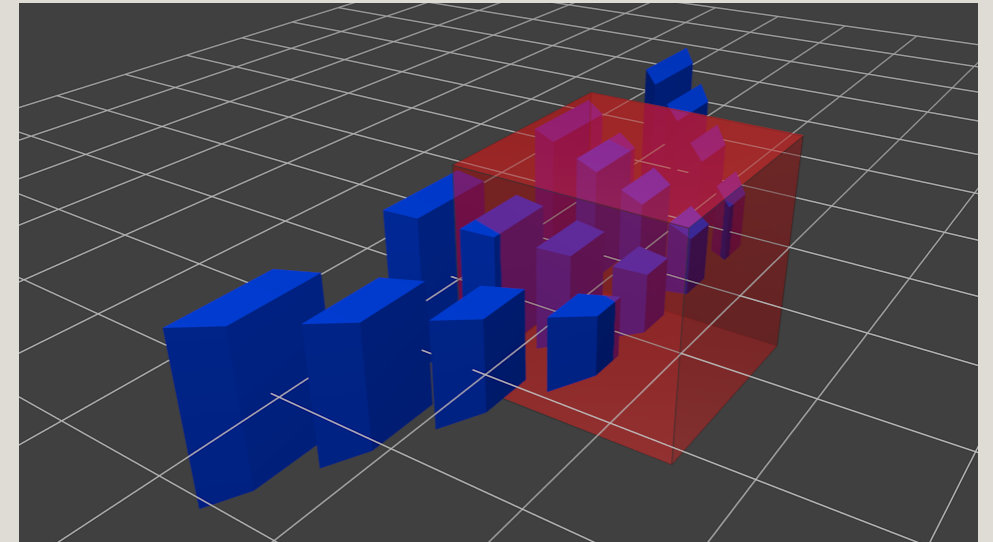
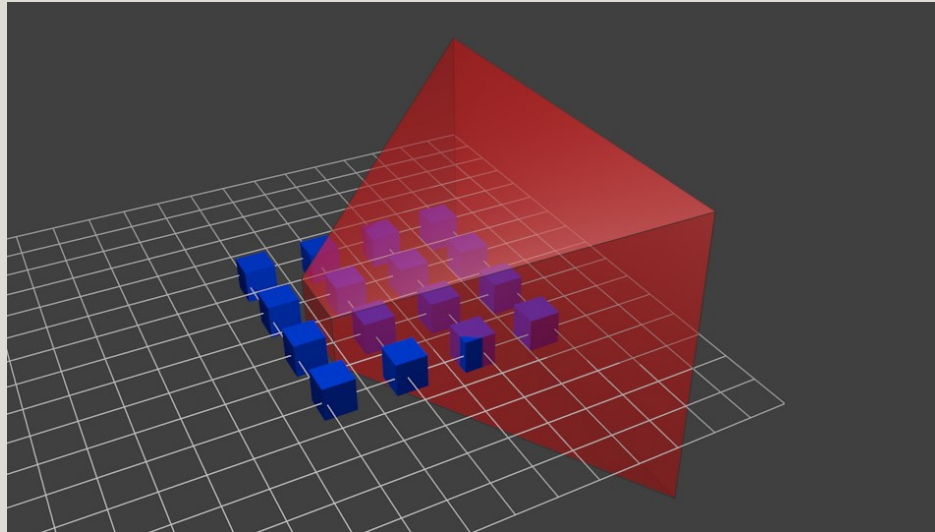
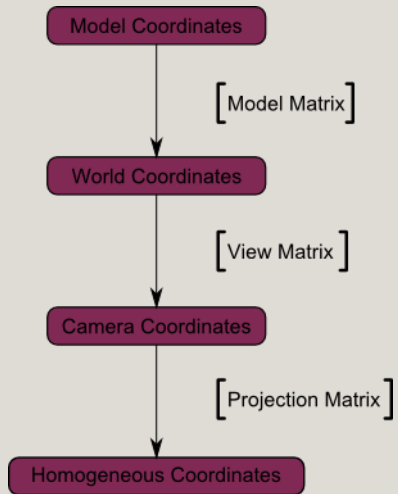
MATRICE MONDE



MATRICE DE VUE

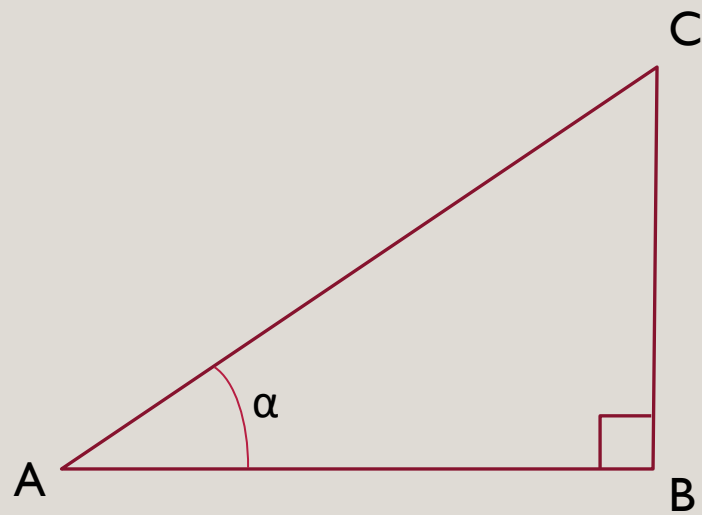


MATRICE DE PROJECTION



TRIGONOMETRIE

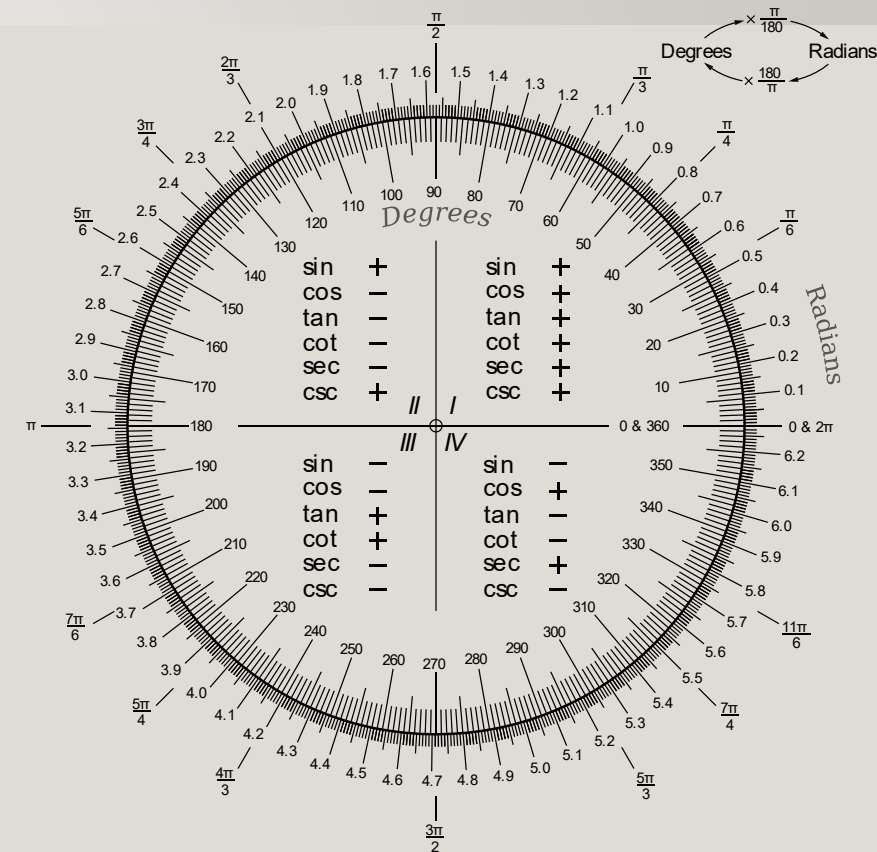
TRIANGLE RECTANGLE



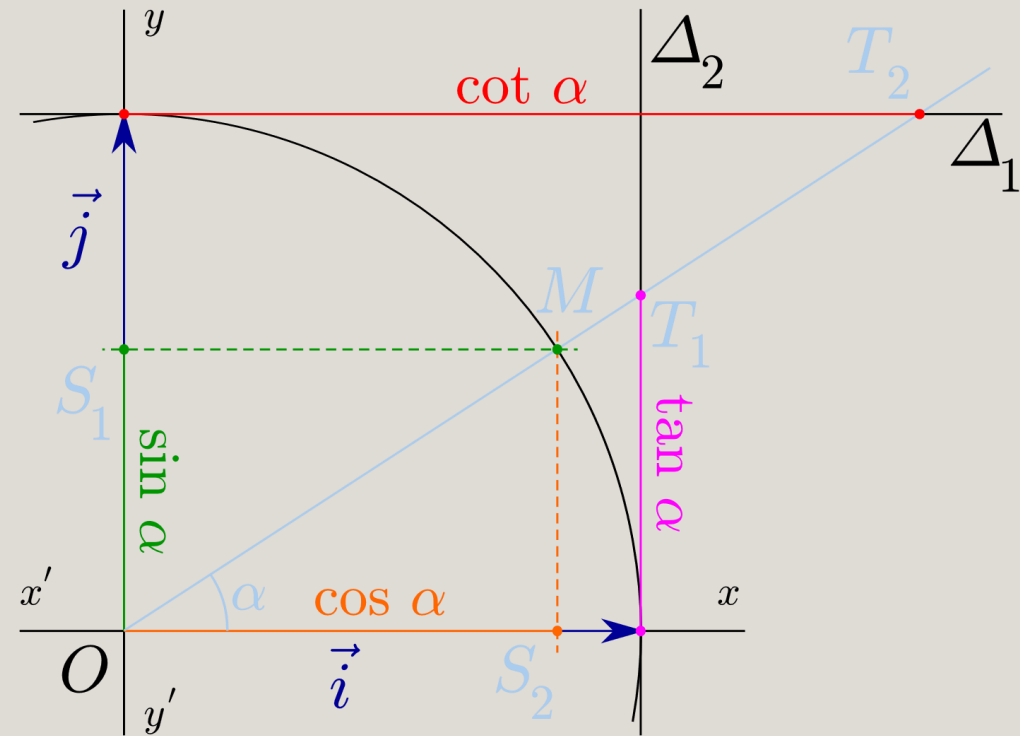
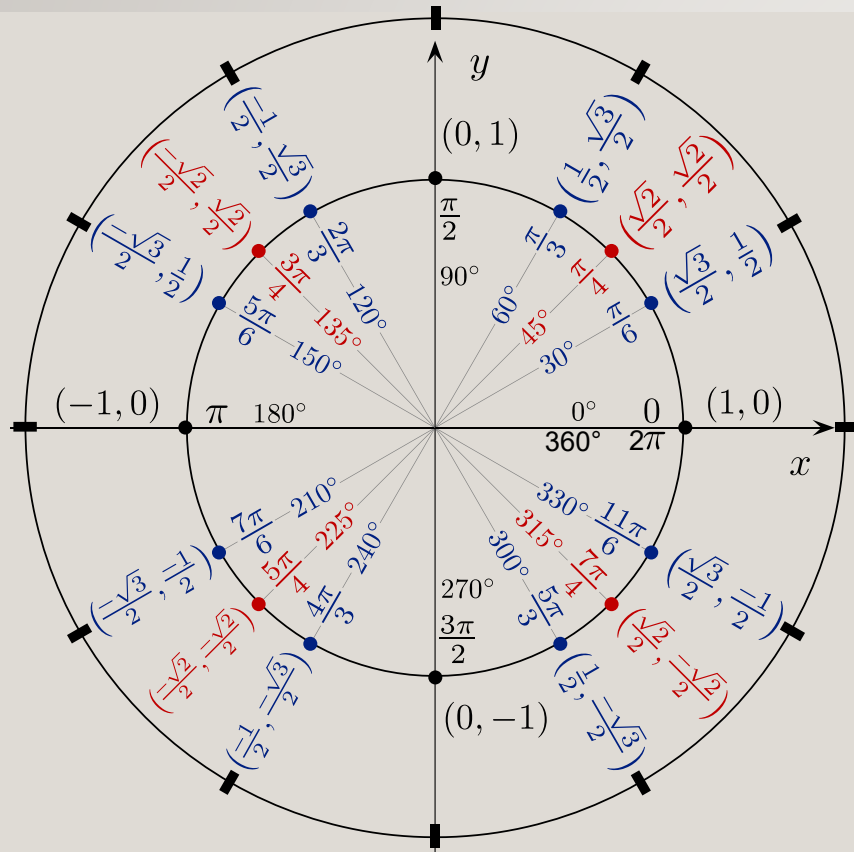
$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$



CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE



MATRICE ET VECTEUR

MULTIPLICATION MATRICE ET TRANSFORMATION D'UN POINT PAR UNE MATRICE

Transformation d'un vecteur par une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz + dw \\ ex + fy + gz + hw \\ ix + jy + kz + lw \\ mx + ny + oz + pw \end{bmatrix}$$

Transformation d'une matrice par une matrice
Addition l'effet des deux matrices

$$\begin{bmatrix} ax_1 & ax_2 & ax_3 & ax_4 \\ ay_1 & ay_2 & ay_3 & ay_4 \\ az_1 & az_2 & az_3 & az_4 \\ aw_1 & aw_2 & aw_3 & aw_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} bx_1 & bx_2 & bx_3 & bx_4 \\ by_1 & by_2 & by_3 & by_4 \\ bz_1 & bz_2 & bz_3 & bz_4 \\ bw_1 & bw_2 & bw_3 & bw_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1*bx_1+ax_2*by_1+ax_3*bz_1+ax_4*bw_1 & ax_1*bx_2+ax_2*by_2+ax_3*bz_2+ax_4*bw_2 & ax_1*bx_3+ax_2*by_3+ax_3*bz_3+ax_4*bw_3 & ax_1*bx_4+ax_2*by_4+ax_3*bz_4+ax_4*bw_4 \\ ay_1*bx_1+ay_2*by_1+ay_3*bz_1+ay_4*bw_1 & ay_1*bx_2+ay_2*by_2+ay_3*bz_2+ay_4*bw_2 & ay_1*bx_3+ay_2*by_3+ay_3*bz_3+ay_4*bw_3 & ay_1*bx_4+ay_2*by_4+ay_3*bz_4+ay_4*bw_4 \\ az_1*bx_1+az_2*by_1+az_3*bz_1+az_4*bw_1 & az_1*bx_2+az_2*by_2+az_3*bz_2+az_4*bw_2 & az_1*bx_3+az_2*by_3+az_3*bz_3+az_4*bw_3 & az_1*bx_4+az_2*by_4+az_3*bz_4+az_4*bw_4 \\ aw_1*bx_1+aw_2*by_1+aw_3*bz_1+aw_4*bw_1 & aw_1*bx_2+aw_2*by_2+aw_3*bz_2+aw_4*bw_2 & aw_1*bx_3+aw_2*by_3+aw_3*bz_3+aw_4*bw_3 & aw_1*bx_4+aw_2*by_4+aw_3*bz_4+aw_4*bw_4 \end{bmatrix}$$

TRANSLATION

- Une translation déplace un point en 3D latéralement suivant les axes x, y et z
- Par exemple: le point (2, 0, 10) si on applique une translation de (3, -2, 5) devient (2 + 3, 0 -2, 10 + 5) = (5, -2, 15)
- Matrice 4x4 équivalente:

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{blue}{0} & \textit{Translation.x} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{1} & \textcolor{blue}{0} & \textit{Translation.y} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{blue}{1} & \textit{Translation.z} \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{green}{0} & \textcolor{blue}{0} & 1 \end{bmatrix}$$

MISE À L'ÉCHELLE

- Une mise à l'échelle agrandit ou rétrécit un point autour de son origine
- Par exemple: le point (2, 0, 10) si on applique une mise à l'échelle de (0.5, 2, 3) devient (2 x 0.5, 0 x 2, 3 x 10) = (1, 0, 30)
- Matrice 4x4 équivalente:

$$\begin{bmatrix} \textit{Scale.x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textit{Scale.y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textit{Scale.z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ROTATION

- Une rotation fait tourner un point autour d'un axe X,Y ou Z
- Matrice 4x4 équivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation X

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation Y

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation Z

EXERCICE

- Calculer la rotation autour de l'axe X de 30° du point $(2, 0, 10)$
- Calculer la rotation autour de l'axe Y de 60° du point $(-2, 4, 3)$
- Calculer la rotation autour de l'axe Z de 100° du point $(3, -2, 4)$

REPONSE

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz + dw \\ ex + fy + gz + hw \\ ix + jy + kz + lw \\ mx + ny + oz + pw \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 10 + 0 \times 0 \\ 0 \times 2 + \cos(30) \times 0 - \sin(30) \times 10 + 0 \times 0 \\ 0 \times 2 + \sin(30) \times 0 + \cos(30) \times 10 + 0 \times 0 \\ 0 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 10 + 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(60) \times -2 + 0 \times 4 + \sin(60) \times 3 + 0 \times 0 \\ 0 \times -2 + 1 \times 4 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \\ -\sin(60) \times -2 + 0 \times 4 + \cos(60) \times 3 + 0 \times 0 \\ 0 \times -2 + 0 \times 4 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 4 \\ 3.23 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(100) \times 3 - \sin(100) \times -2 - 0 \times 4 - 0 \times 0 \\ \sin(100) \times 3 + \cos(100) \times -2 + 0 \times 4 + 0 \times 0 \\ 0 \times 3 + 0 \times -2 + 1 \times 4 + 0 \times 0 \\ 0 \times 3 + 0 \times -2 + 0 \times 0 + 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 3.3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$