

Rapport Math

Troller Fabian, Rivier Nicolas

2022-04-25

Introduction Générale

Pour ce TP, nous avons reçu comme objectif de calculer une convolution de signaux numériquement et à la main d'en calculer l'erreur entre les deux, Ainsi que réussir à enlever le bruit d'une image.

Introduction théorique

Intégration numérique

On définit une fonction $f(x)$,

$$f(x) = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)}, \quad (1)$$

Où l'on veut calculer son intégration entre un intervalle de $[a, b]$ à un certain N d'approximation.

$$I(a, b, N, f(x)) = \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i\delta x)\delta x, \quad \delta x = \frac{b - a}{N}. \quad (2)$$

Afin de pouvoir faire une comparaison d'erreur entre la solution numérique et analytique nous allons prendre la même intervalle $[a, b] = [1, 5]$

Intégration analytique

Afin de valider notre intégration analytique et étudié l'erreur en fonction du N nombre d'intervalle. Nous allons calculer la solution analytique de notre fonction.

$$f(x) = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)}, \quad (3)$$

$$I = \int_a^b f(x) * dx = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)} dx. \quad (4)$$

pour un intervalle $[1, 5]$.

$$\int_1^5 -\frac{2x - 1}{e^{(-x^2 + x - 2)}} \quad (5)$$

$$\int_1^5 -(2x - 1) * \frac{1}{e^{(-x^2 + x - 2)}} \quad (6)$$

$$\int_1^5 (-2x + 1) * e^{(-x^2+x-2)^{-1}} \quad (7)$$

$$\int_1^5 (-2x + 1) * e^{(-x^2+x-2)} \quad (8)$$

Déterminer la transformée en u

$$\int_1^5 du * e^u \quad (9)$$

$$u = f(x) = -x^2 + x - 2 \quad (10)$$

$$du = F(x)' = -2x + 1 \quad (11)$$

$$\int_1^5 e^u * du = \Big|_1^5 e^{(-x^2+x-2)} \quad (12)$$

selon

$$\Big|_a^b f(x) = f(b) - f(a) \quad (13)$$

on obtient

$$\Big|_1^5 e^{(-x^2+x-2)} = e^{-5^2+5-2} - e^{-1^2+1-2} \quad (14)$$

$$e^{-25+5-2} - e^{-1+1-2} = e^{-22} - e^{-2} \quad (15)$$

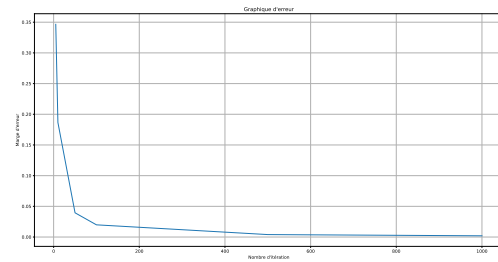
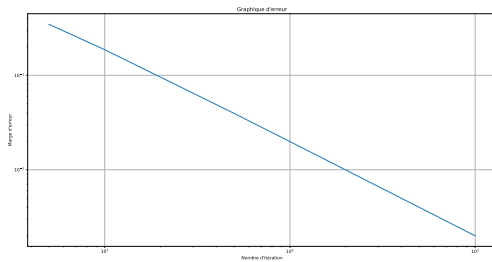
finalemt

$$I = \frac{1}{e^{22}} - \frac{1}{e^2} = -0,135335283 \quad (16)$$

Validation

Afin de comparer nos résultats nous allons varier **N** de 5,10,50,100,500,1000 pour une même intervalle a b = **[1,5]** et calculer l'erreur de notre résultat numérique par rapport à la solution analytique.

$$E(N) = \left| \frac{I - I(a, b, N, f(x))}{I} \right| \quad (17)$$



Sur ces deux graphiques, on peut constater que l'erreur diminue plus l'itération est grande, sur le premier graphique, l'échelle est logarithmique. Pour le deuxième graphique, l'échelle est standard et permet de voir également cette diminution de l'erreur sous une autre forme.

Convolutions et filtrage

Afin de se familiariser avec les convolutions, nous allons filtrer des signaux à 1 dimension.

Pour cela nous définissons un signal composé de deux signaux avec chacun une fréquence différente w_1 et w_2 .

$$s(x) = \sin(2\pi\omega_1x) + \sin(2\pi\omega_2x). \quad (18)$$

et un certain filtre

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi}, & \text{si } x \in [-\psi/2, \psi/2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (19)$$

Le but est de déterminer l'intervalle du filtre

$$[-\psi/2, \psi/2] \quad (20)$$

afin que la convolution de ces deux fonctions $(f*s)(x)$ annule une des deux composantes sinusoïdales du signal.

Solution analytique

Délimitation

La convolution de deux fonctions est définie de la sorte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-t) * f(x) dt \quad (21)$$

On va développer dans les intervalles que nous recherchons.

$$\int_{-\infty}^{-\psi/2} S(x-t) * f(x) dt + \int_{-\psi/2}^{\psi/2} S(x-t) * f(x) dt + \int_{\psi/2}^{\infty} S(x-t) * f(x) dt \quad (22)$$

En observant $f(x)$ on constate que dans l'intervalle $[-\psi/2, \psi/2]$ $f(x)$ vaut $1/\psi$ sinon 0 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi}, & \text{si } x \in [-\psi/2, \psi/2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

donc notre domaine de convolution recherché s'étant a

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} S(x-t) * f(x) dt = \int_{-\psi/2}^{\psi/2} (\sin(2\pi\omega_1(x-t)) + \sin(2\pi\omega_2(x-t))) * \frac{1}{\psi} dt \quad (24)$$

Transformée primaire

On cherche à déterminer la dérivée primaire du sinus et de sa composante par la factorisation de primitive en fonction de t :

$$f(g(t))' = f'(g(t)) * g'(t) \quad (25)$$

pour :

$$\int \sin(2\pi\omega(x-t)) dt \quad (26)$$

$$f(t) = \sin(x) \quad \text{étant} \quad f'(t) = -\cos(x) \quad (27)$$

$$g(t) = 2\pi\omega(x-t) \quad \text{étant} \quad g'(t) = 2\pi\omega * 0 - 2\pi\omega * 1 = -2\pi\omega \quad (28)$$

Ce qui nous donne:

$$\int \sin(2\pi\omega(x-t)) dt \neq -\cos(2\pi\omega(x-t)) * -2\pi\omega \quad (29)$$

Donc pour y remédier on multiplie par 1 l'intégrale:

$$\frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} = 1 \quad (30)$$

$$\frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} * \int \sin(2\pi\omega(x-t))dt = \frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} * -\cos(2\pi\omega(x-t)) * -2\pi\omega \quad (31)$$

Ce qui nous donne finalement comme résultat:

$$\int \sin(2\pi\omega(x-t))dt = \frac{-\cos(2\pi\omega(x-t))}{-2\pi\omega} = \frac{\cos(2\pi\omega(x-t))}{2\pi\omega} \quad (32)$$

Transformée primaire de l'intégral au complet

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} (\sin(2\pi\omega_1(x-t)) + \sin(2\pi\omega_2(x-t))) * \frac{1}{\psi} dt \quad (33)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \left(\frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))}{2\pi\omega_1} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x-t))}{2\pi\omega_2} \right) * \frac{1}{\psi} dt \quad (34)$$

Distribution des constante et factoriser au même dénominateur commun:

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))}{2\pi\omega_1\psi} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x-t))}{2\pi\omega_2\psi} dt \quad (35)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))}{2\pi\omega_1\psi} * \frac{\omega_2}{\omega_2} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x-t))}{2\pi\omega_2\psi} * \frac{\omega_1}{\omega_1} dt \quad (36)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x-t))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} dt \quad (37)$$

Distribution de la constante de temps

Selon la règle:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) = f(x-\pi) - f(x+\pi) \quad (38)$$

Notre convolution devient:

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x-t))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} dt \quad (39)$$

$$= \frac{\cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} - \frac{\cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (40)$$

$$= \frac{\cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (41)$$

Regroupement des variables communes

Pour simplifier, je regroupe la formule en différentes parties :

$$\frac{A + B}{C} \quad (42)$$

$$A = \cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2))\omega_2 \quad (43)$$

$$B = \cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))\omega_1 \quad (44)$$

$$C = 2\pi\omega_1\omega_2\psi \quad (45)$$

Règles de transformation sinusoïdal

Selon une des règles de transformation de somme en produit du sinus:

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (46)$$

Nous allons appliquer cette règle sur A et B

$$A = \cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2)) * \omega_2 \quad (47)$$

$$(\cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2)) - \cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2))) * \omega_2 \quad (48)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(x - \psi/2) + 2\pi\omega_1(x + \psi/2)}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(x - \psi/2) - 2\pi\omega_1(x + \psi/2)}{2}\right) * \omega_2 \quad (49)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1((x - \psi/2) + (x + \psi/2))}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1((x - \psi/2) - (x + \psi/2))}{2}\right) * \omega_2 \quad (50)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(2x)}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(-2 * \psi/2)}{2}\right) * \omega_2 \quad (51)$$

$$- 2\sin(\pi\omega_1(2x))\sin(\pi\omega_1(-\psi)) * \omega_2 \quad (52)$$

$$- 2\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 \quad (53)$$

Puis sur B de la même façon.

$$B = \cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))\omega_1 \quad (54)$$

$$(\cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2)) - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))) * \omega_1 \quad (55)$$

$$\dots \quad (56)$$

$$- 2\sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1 \quad (57)$$

Finalement en rassemblant A,B et C nous obtenons

$$\frac{-2\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 - 2\sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (58)$$

$$\frac{-\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 - \sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (59)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1x)\sin(\pi\omega_1\psi) * \omega_2 + \sin(2\pi\omega_2x)\sin(\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (60)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi\omega_1\psi)}{\pi\omega_1\psi} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi\omega_2\psi)}{\pi\omega_2\psi} \quad (61)$$

On peut alors observer que les deux composant du signal (les deux signaux sinusoïdaux) dépende d'un sinus(w * x) et sinus(w * phi). On notera alors que si phi équivaut à la période d'un des deux composant 1/w. phi annule la composant visé.

Démonstration:

$$\psi = \frac{1}{\omega_1} \quad (62)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi\omega_1 \frac{1}{\omega_1})}{\pi\omega_1 \frac{1}{\omega_1}} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi\omega_2 \frac{1}{\omega_1})}{\pi\omega_2 \frac{1}{\omega_1}} \quad (63)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi \frac{\omega_1}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_1}{\omega_1}} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (64)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi)}{\pi} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (65)$$

Vu que sinus(Pi) équivaut a 0. (calcule en radiant) cela revient a faire:

$$0 + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (66)$$

On a belle est bien annulé le premier composant (signal sinusoïdal) composant le signal de base S(x)

Convolution discrète

Convolution en 2 dimensions

Partie 1

Calculer a la main le produite de convolution suivant, en utilisant la méthode de gestion de bord par une valeur de zero:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ -4 & -11 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 2

Appliquer différents filtres sur l'image suivante "part2.pgm":

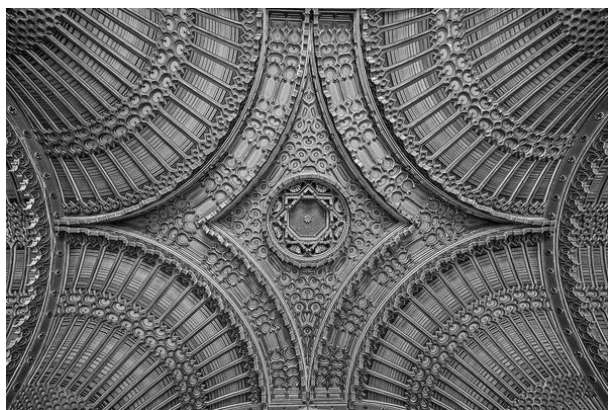


FIGURE 1 – part2.pgm

filtre F0

$$\underline{\underline{F_0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

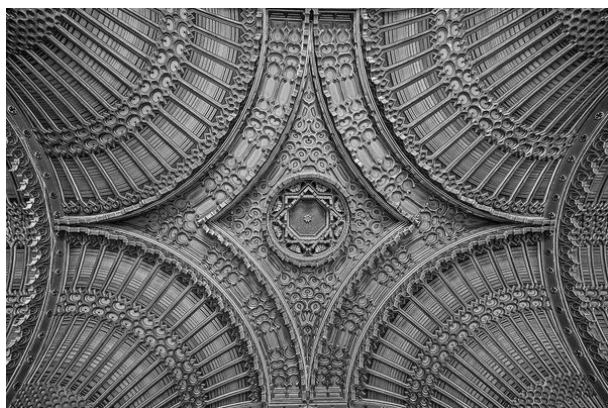


FIGURE 2 – part2_identitaire.pgm

On peut déterminer que le filtre F0 prend pas en compte les pixels dans les alentours du pixels focus (central) ce qui revient à faire une copie de la matrice sans changement. On a donc un filtre identitaire.

filtre F1

$$\underline{\underline{F_1}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:



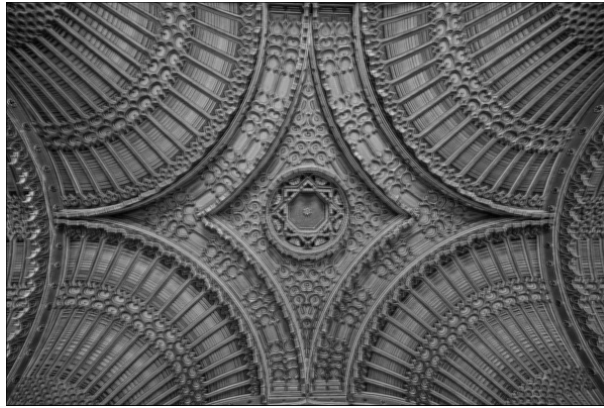
FIGURE 3 – part2_blur25.pgm

On détermine que le filtre F1 fait la moyenne des différents pixels au alentour du focus, donc on a donc une filtre moyennneur / blur d'une matrice de 5x5. On aperçois donc bien sur l'image traitée un floutage générale.

filtre F2

$$\underline{\underline{F_2}} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

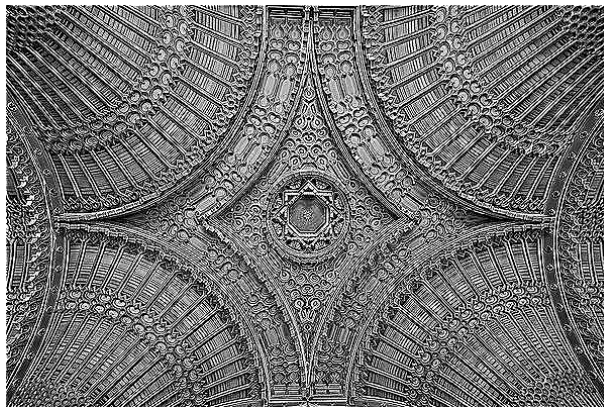
**FIGURE 4** – part2_blurCent.pgm

On détermine que le filtre F2 fait la moyenne des différents pixels au alentour du focus en donnant plus de point au pixels central et ceux qui lui sont le plus proches. On aperçois donc bien sur l'image traitée un floutage générale en donnant plus d'importance au détails.

filtre F3

$$\underline{\underline{F_3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

**FIGURE 5** – part2_contourF3.pgm

filtre F4

$$\underline{\underline{F_4}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

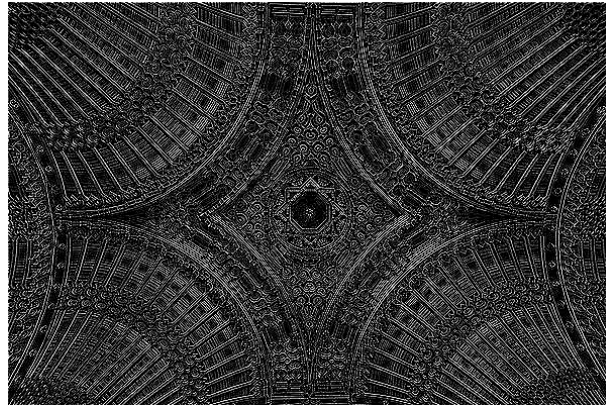


FIGURE 6 – part2_contourF4.pgm