

Rapport Math

Troller Fabian, Rivier Nicolas

2022-04-25

Introduction Générale

Pour ce TP de math, nous avons dû comprendre, calculer et implémentés des intégrales, nous devons comparer nos résultats de calcul à nos résultats d'implémentation pour calculer l'erreur entre les deux. Nous devons ensuite représenté l'erreur sous la forme d'un graphique. Nous avons également dû comprendre la convolution de signaux à 1 dimension et de matrice à 2 dimensions, il fallait utiliser cette dernière dans le but de débruiter des images en niveaux de gris en appliquant finalement une normalisation de l'image.

Introduction théorique

Intégration numérique

On définit une fonction $f(x)$,

$$f(x) = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)}, \quad (1)$$

Où l'on veut calculer son intégration entre un intervalle de $[a, b]$ à un certain N d'approximation.

$$I(a, b, N, f(x)) = \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i\delta x)\delta x, \quad \delta x = \frac{b - a}{N}. \quad (2)$$

Afin de pouvoir faire une comparaison d'erreur entre la solution numérique et analytique nous allons prendre la meme intervalle $[a, b] = [1, 5]$

Intégration analytique

Afin de valider notre intégration analytique et étudié l'erreur en fonction du N nombre d'intervalle. Nous allons calculer la solution analytique de notre fonction.

$$f(x) = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)}, \quad (3)$$

$$I = \int_a^b f(x) * dx = -\frac{2x - 1}{\exp(x^2 - x + 2)} dx. \quad (4)$$

pour un intervalle $[1, 5]$.

$$\int_1^5 -\frac{2x-1}{e^{(-x^2+x-2)}} \quad (5)$$

$$\int_1^5 -(2x-1) * \frac{1}{e^{(-x^2+x-2)}} \quad (6)$$

$$\int_1^5 (-2x+1) * e^{(-x^2+x-2)^{-1}} \quad (7)$$

$$\int_1^5 (-2x+1) * e^{(-x^2+x-2)} \quad (8)$$

Déterminer la transformée en u

$$\int_1^5 du * e^u \quad (9)$$

$$u = f(x) = -x^2 + x - 2 \quad (10)$$

$$du = F(x)' = -2x + 1 \quad (11)$$

$$\int_1^5 e^u * du = \Big|_1^5 e^{(-x^2+x-2)} \quad (12)$$

selon

$$\Big|_a^b f(x) = f(b) - f(a) \quad (13)$$

on obtient

$$\Big|_1^5 e^{(-x^2+x-2)} = e^{-5^2+5-2} - e^{-1^2+1-2} \quad (14)$$

$$e^{-25+5-2} - e^{-1+1-2} = e^{-22} - e^{-2} \quad (15)$$

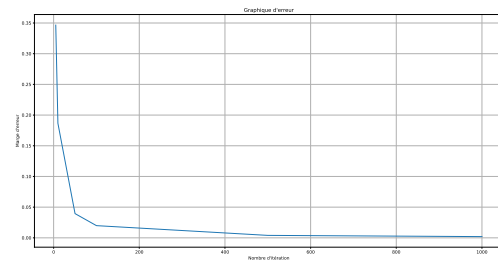
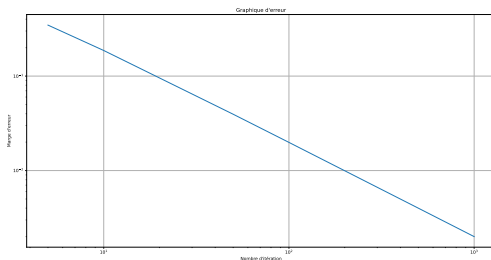
finalement

$$I = \frac{1}{e^{22}} - \frac{1}{e^2} = -0,135335283 \quad (16)$$

Validation

Afin de comparer nos résultats nous allons varier N de 5,10,50,100,500,1000 pour une même intervalle $a, b = [1,5]$ et calculer l'erreur de notre résultat numérique par rapport à la solution analytique.

$$E(N) = \left| \frac{I - I(a, b, N, f(x))}{I} \right| \quad (17)$$



Sur ces deux graphiques, on peut constater que l'erreur diminue plus l'itération est grande, sur le premier graphique, l'échelle est logarithmique. Pour le deuxième graphique, l'échelle est standard et permet de voir également cette diminution de l'erreur sous une autre forme.

Convolutions et filtrage

Afin de se familiariser avec les convolutions, nous allons filtrer des signaux à 1 dimension.

Pour cela nous définissons un signal composé de deux signaux avec chacun une fréquence différents w_1 et w_2 .

$$s(x) = \sin(2\pi\omega_1x) + \sin(2\pi\omega_2x). \quad (18)$$

et un certain filtre

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi}, & \text{si } x \in [-\psi/2, \psi/2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (19)$$

Le but est de déterminer l'intervalle du filtre

$$[-\psi/2, \psi/2] \quad (20)$$

afin que la convolution de ces deux fonctions $(f \star s)(x)$ annule une des deux composantes sinusoïdales du signal.

Solution analytique

Délimitation

La convolution de deux fonctions est définie de la sorte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-t) * f(x) dt \quad (21)$$

On va développer dans les intervalles que nous recherchons.

$$\int_{-\infty}^{-\psi/2} S(x-t) * f(x) dt + \int_{-\psi/2}^{\psi/2} S(x-t) * f(x) dt + \int_{\psi/2}^{\infty} S(x-t) * f(x) dt \quad (22)$$

En observant $f(x)$ on constate que dans l'intervalle $[-\psi/2, \psi/2]$ $f(x)$ vaut $1/\psi$ sinon 0 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi}, & \text{si } x \in [-\psi/2, \psi/2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

donc notre domaine de convolution recherché s'étant a

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} S(x-t) * f(x) dt = \int_{-\psi/2}^{\psi/2} (\sin(2\pi\omega_1(x-t)) + \sin(2\pi\omega_2(x-t))) * \frac{1}{\psi} dt \quad (24)$$

Transformée primaire

On cherche à déterminer la dérivée primaire du sinus et de sa composante par la factorisation de primitive en fonction de t :

$$f(g(t))' = f'(g(t)) * g'(t) \quad (25)$$

pour :

$$\int \sin(2\pi\omega(x-t)) dt \quad (26)$$

$$f(t) = \sin(x) \quad \text{étant} \quad f'(t) = -\cos(x) \quad (27)$$

$$g(t) = 2\pi\omega(x - t) \quad \text{étant} \quad g'(t) = 2\pi\omega * 0 - 2\pi\omega * 1 = -2\pi\omega \quad (28)$$

Ce qui nous donne:

$$\int \sin(2\pi\omega(x - t))dt \neq -\cos(2\pi\omega(x - t)) * -2\pi\omega \quad (29)$$

Donc pour y remédier on multiplie par 1 l'intégrale:

$$\frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} = 1 \quad (30)$$

$$\frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} * \int \sin(2\pi\omega(x - t))dt = \frac{-2\pi\omega}{-2\pi\omega} * -\cos(2\pi\omega(x - t)) * -2\pi\omega \quad (31)$$

Ce qui nous donne finalement comme résultat:

$$\int \sin(2\pi\omega(x - t))dt = \frac{-\cos(2\pi\omega(x - t))}{-2\pi\omega} = \frac{\cos(2\pi\omega(x - t))}{2\pi\omega} \quad (32)$$

Transformée primaire de l'intégral au complet

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} (\sin(2\pi\omega_1(x - t)) + \sin(2\pi\omega_2(x - t))) * \frac{1}{\psi} dt \quad (33)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \left(\frac{\cos(2\pi\omega_1(x - t))}{2\pi\omega_1} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x - t))}{2\pi\omega_2} \right) * \frac{1}{\psi} dt \quad (34)$$

Distribution des constante et factoriser au même dénominateur commun:

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x - t))}{2\pi\omega_1\psi} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x - t))}{2\pi\omega_2\psi} dt \quad (35)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x - t))}{2\pi\omega_1\psi} * \frac{\omega_2}{\omega_2} + \frac{\cos(2\pi\omega_2(x - t))}{2\pi\omega_2\psi} * \frac{\omega_1}{\omega_1} dt \quad (36)$$

$$\int_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x - t))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x - t))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} dt \quad (37)$$

Distribution de la constante de temps

Selon la règle:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) = f(x - \pi) - f(x + \pi) \quad (38)$$

Notre convolution devient:

$$\Big|_{-\psi/2}^{\psi/2} \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-t))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x-t))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (39)$$

$$= \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-\psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x-\psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} - \frac{\cos(2\pi\omega_1(x+\psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x+\psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (40)$$

$$= \frac{\cos(2\pi\omega_1(x-\psi/2))\omega_2 + \cos(2\pi\omega_2(x-\psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_1(x+\psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_2(x+\psi/2))\omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (41)$$

Regroupement des variables communes

Pour simplifier, je regroupe la formule en différentes parties :

$$\frac{A+B}{C} \quad (42)$$

$$A = \cos(2\pi\omega_1(x-\psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_1(x+\psi/2))\omega_2 \quad (43)$$

$$B = \cos(2\pi\omega_2(x-\psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_2(x+\psi/2))\omega_1 \quad (44)$$

$$C = 2\pi\omega_1\omega_2\psi \quad (45)$$

Règles de transformation sinusoïdal

Selon une des règles de transformation de somme en produit du sinus:

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (46)$$

Nous allons appliquer cette règle sur A et B

$$A = \cos(2\pi\omega_1(x-\psi/2))\omega_2 - \cos(2\pi\omega_1(x+\psi/2)) * \omega_2 \quad (47)$$

$$(\cos(2\pi\omega_1(x - \psi/2)) - \cos(2\pi\omega_1(x + \psi/2))) * \omega_2 \quad (48)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(x - \psi/2) + 2\pi\omega_1(x + \psi/2)}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(x - \psi/2) - 2\pi\omega_1(x + \psi/2)}{2}\right) * \omega_2 \quad (49)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1((x - \psi/2) + (x + \psi/2))}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1((x - \psi/2) - (x + \psi/2))}{2}\right) * \omega_2 \quad (50)$$

$$- 2\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(2x)}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi\omega_1(-2 * \psi/2)}{2}\right) * \omega_2 \quad (51)$$

$$- 2\sin(\pi\omega_1(2x))\sin(\pi\omega_1(-\psi)) * \omega_2 \quad (52)$$

$$- 2\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 \quad (53)$$

Puis sur B de la même façon.

$$B = \cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2))\omega_1 - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))\omega_1 \quad (54)$$

$$(\cos(2\pi\omega_2(x - \psi/2)) - \cos(2\pi\omega_2(x + \psi/2))) * \omega_1 \quad (55)$$

$$\dots \quad (56)$$

$$- 2\sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1 \quad (57)$$

Finalement en rassemblant A,B et C nous obtenons

$$\frac{-2\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 - 2\sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{2\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (58)$$

$$\frac{-\sin(2\pi\omega_1x)\sin(-\pi\omega_1\psi) * \omega_2 - \sin(2\pi\omega_2x)\sin(-\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (59)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi\omega_1\psi) * \omega_2 + \sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi\omega_2\psi) * \omega_1}{\pi\omega_1\omega_2\psi} \quad (60)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi\omega_1\psi)}{\pi\omega_1\psi} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi\omega_2\psi)}{\pi\omega_2\psi} \quad (61)$$

On peut alors observer que les deux composant du signal (les deux signaux sinusoïdaux) dépende d'un sinus(w * x) et sinus(w * phi). On notera alors que si phi équivaut à la période d'un des deux composant 1/w. phi annule la composant visé.

Démonstration:

$$\psi = \frac{1}{\omega_1} \quad (62)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi\omega_1 \frac{1}{\omega_1})}{\pi\omega_1 \frac{1}{\omega_1}} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi\omega_2 \frac{1}{\omega_1})}{\pi\omega_2 \frac{1}{\omega_1}} \quad (63)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi \frac{\omega_1}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_1}{\omega_1}} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (64)$$

$$\frac{\sin(2\pi\omega_1 x)\sin(\pi)}{\pi} + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (65)$$

Vu que sinus(Pi) équivaut a 0. (calcule en radian) cela revient a faire:

$$0 + \frac{\sin(2\pi\omega_2 x)\sin(\pi \frac{\omega_2}{\omega_1})}{\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (66)$$

On a belle est bien annulé la première composante (signal sinusoïdal) qui compose le signal de base S(x)

Convolution discrète

Pour exemplifier ces calculs nous allons implémenter une convolution sur un signal 1d afin de récupérer une de ces composantes. Les calculs sont effectuer en code c'est l'affichage avec l'aide d'un tableur.

Nous apercevons deux signaux sinusoïdal donc le premier **Signal1** possède une fréquence de 25hz pour une amplitude de 5. Le seconde **Signal 2** possède une fréquence de 2.5hz pour une amplitude de 10.



FIGURE 1 – Deux composantes sinusoïdal

En additionnant (superposant) les deux composantes sinusoïdales, on obtient ce nouveau signal. Qui n'est rien d'autre qu'une composante a basses fréquences contenant une oscillation d'un signal plus rapide.

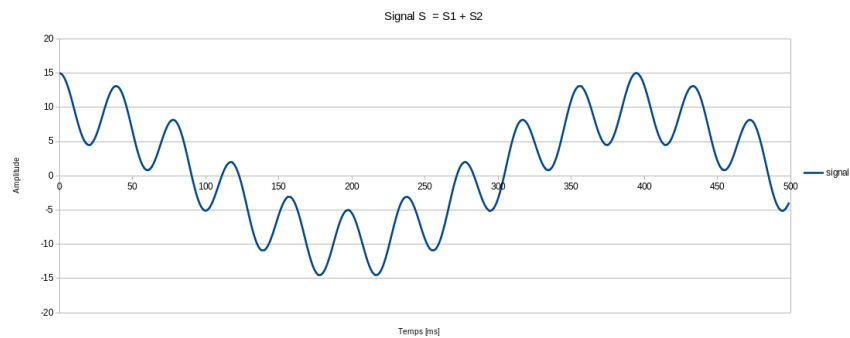


FIGURE 2 – Signal 1D de traitement

Nous allons alors convoluer ce signal afin d'y retrouver une des deux composantes de base. Pour cela, nous allons utiliser l'équation suivante avec un filtre carré.

Fonction de convolution:

$$(s * u)[t] = \sum_{n=-N}^{+N} s[n] \cdot u[t - n] \quad (67)$$

Filtre $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi}, & \text{si } x \in [-\psi/2, \psi/2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (68)$$

En utilisant ψ de la taille d'une période d'une des deux composantes sinusoïdales comme vu au chapitre précédent, nous arrivons à tuer l'autre composante. Par exemple pour tuer la composantes plus rapides **Signal1** nous allons utiliser $\psi = 1/25\text{hz} = 0,04$.

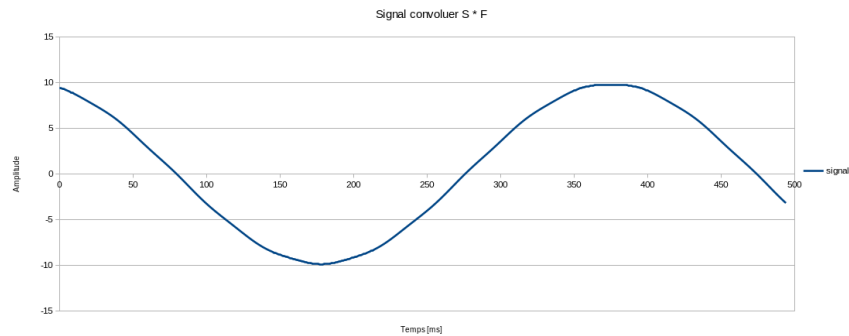


FIGURE 3 – Signal convoluer retrouvant la composante S2

Exemple de convolution ou le choix de $\psi = 0,03$ ne permet pas de tuer une composante :

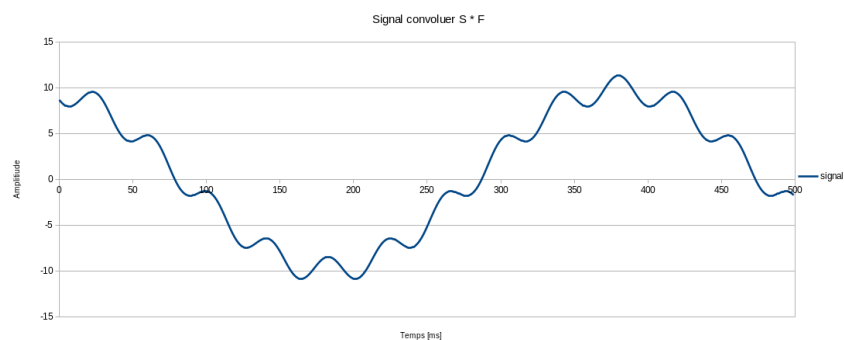


FIGURE 4 – Signal convoluer avec un psi mal choisis

On remarque que l'amplitude c'est rapprocher de celle du **signal2** mais y reste une oscillation réduite du **signal1**.

On peut conclure que la convolution avec un filtre carré revient à échantillonner le signal sur une certaine base de fréquences. Si cette fréquence est basée sur l'une des composantes, elle s'annule et ressort que les autres fréquences ou composantes du signal.

Convolution en 2 dimensions

Partie 1

Calculer a la main le produite de convolution suivant, en utilisant la méthode de gestion de bord par une valeur de zéro:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ -4 & -11 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie 2

Appliquer différents filtres sur l'image suivante "part2.pgm" :

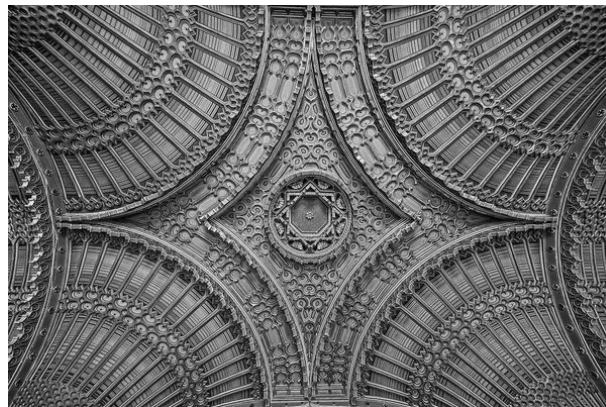


FIGURE 5 – part2.pgm

filtre F0

$$\underline{\underline{F_0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

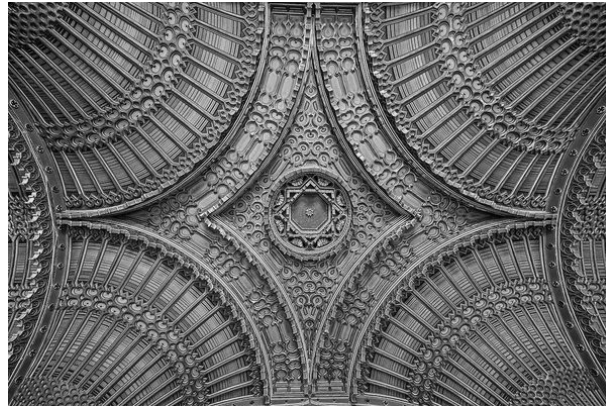


FIGURE 6 – part2_identitaire.pgm

On détermine que le filtre F0 ne prend pas en compte les pixels aux alentours du pixel focus (centre de la matrice) ce qui revient à copier l'image sans effectuer de changement. On identifie alors un filtre identitaire.

filtre F1

$$\underline{\underline{F_1}} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu :



FIGURE 7 – part2_blur25.pgm

On détermine que le filtre F1 fait la moyenne des différentes valeurs au alentour du centre de la matrice,

on a donc une filtre moyennneur / blur d'une matrice de 5x5. On aperçoit sur l'image traitée un floutage général.

filtre F2

$$\underline{\underline{F_2}} = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:



FIGURE 8 – part2_blurCent.pgm

On détermine que le filtre F2 fait une moyenne des différentes valeurs au alentour du centre de la matrice, en donnant plus de poids aux valeurs les plus proches du centre. On aperçoit sur l'image traitée un floutage général qui impacte moins les détails de l'image.

filtre F3

$$\underline{\underline{F_3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

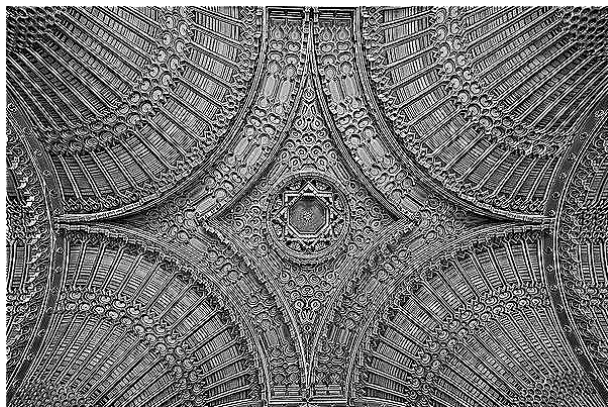


FIGURE 9 – part2_contourF3.pgm

On détermine en observant la matrice, que le filtre F3 soustrait les valeurs aux alentours de la valeur centrale de la matrice, cela a pour effet d'accentuer les changements de valeurs, par exemple un ensemble uniforme ne subit pas de différence, mais un pixel plus sombre entourer des nuances se retrouve augmenter de valeur et inversement pour un pixels plus claire au alentour de plus sombre. On constate donc que notre image traitée perçoit une augmentation de contraste.

filtre F4

$$\underline{\underline{F_4}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résultat de la convolution obtenu:

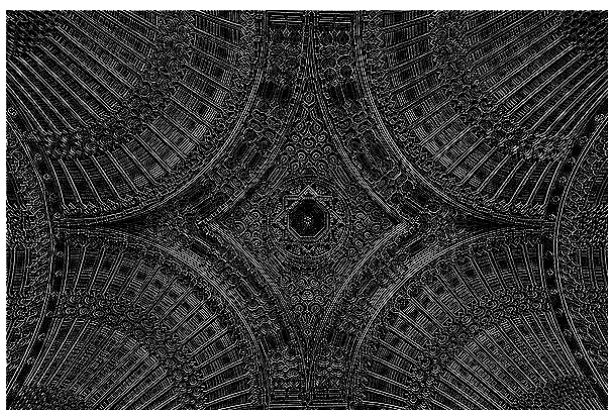


FIGURE 10 – part2_contourF4.pgm

On détermine en observant la matrice, que le filtre F4 soustrait les valeurs aux alentours de la valeur

centrale de la matrice. Ce qui va d'accentuer les changements de valeurs, comme le filtre précédent, mais va également noircir les zones uniformes. La soustraction d'une zone uniforme revient à soustraire les valeurs alentour au centre sur une égalité, donc obtient une valeur de 0 (couleur noire). Le filtre revient alors à mettre en contraste les zones de changement de valeur et noircir les zones uniformes. On obtient donc une détection de contours comme nous pouvons l'observer sur l'image traitée.

Partie 3

Le but de cette dernière partie est de mettre en pratique notre implémentation de filtre afin d'afficher une image fortement bruitée, le filtre moyennier nous permet d'effectuer ce traitement.

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image bruitée est la suivante:

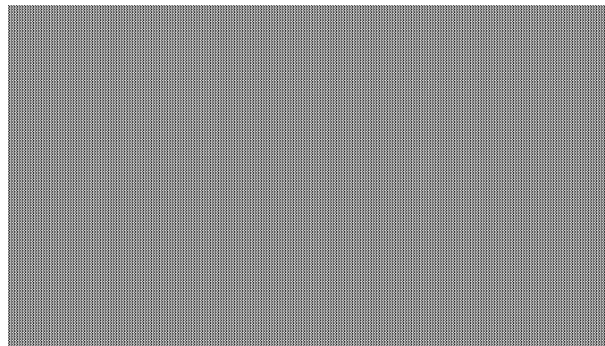


FIGURE 11 – Image original avec bruit

Une fois la convolution avec un filtre moyennier appliquée, on obtient une magnifique image grise.



FIGURE 12 – image après convolution

En zoomant dans l'image on aperçoit des formes très légèrement marquées. Il faut donc normaliser les nuances de couleurs afin d'y faire ressortir les différences de contraste.

Formules de normalisation:

$$Result = (2^n - 1) * \frac{x - min}{max - min}$$

Résultat finalement obtenu:



FIGURE 13 – Image convoluée après normalisation

Conclusion

Pour ce TP, nous avons dû utiliser les connaissances acquises sur les intégrales pour les calculer et les implémentées, nous avons pour ce faire utilisé le langage C. Nous devions calculer à la main certaines intégrales puis comparer les résultats avec ceux obtenus par le programme réalisé, nous avons également comparé l'erreur entre les deux par rapport à la précision possible du programme. Il fallait continuer en convoluant deux signaux à 1 dimension pour comprendre la convolution 1D. Par la

suite, nous devons pouvoir lire une image et la convoluée avec des kernels, ces kernels permettait de débruiter l'image lorsqu'elles étaient bruitées, cela permettait également de changer l'aspect général d'une image. Pour finir, nous devons appliquer sur ces images filtrées une normalisation, elle permet quant à elle de réajuster la valeur de chaque pixels par rapport à son minimum et à son maximum, cela permet finalement de visualiser le résultat.